Министерство транспорта Российской Федерации

**2365**

федеральное агентство путей сообщения

**СамГУПС**

**Самарский государственный университет путей сообщения**

**Кафедра высшей математики**

**контрольные задания**

**для студентов заочной формы обучения**

**инженерно-технических специальностей**

**Часть 1**

Cамара

2009

УДК 519.7

**Высшая математика:** контрольные задания для студентов заочной формы обучения инженерно-технических специальностей. Часть 1 / Ю.В. Гуменникова, Л.В. Кайдалова, О.Е. Лаврусь. – Самара : СамГУПС, 2009. – 32 с.

Утверждены на заседании кафедры протокол № 9 от 11.06.09.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета университета.

Методические указания составлены в соответствии с Государственным образовательным стандартом, с действующей программой по высшей математике для технических специальностей и охватывают разделы линейная алгебра, аналитическая геометрия, комплексные числа, введение в математический анализ, численные методы решения нелинейных уравнений.

В методических указаниях приведены индивидуальные задания, а также примеры решения задач.

Предназначены для студентов первого курса инженерно-технических специальностей заочной формы обучения.

Ил. 6. Табл. 5. Библиогр.: 9 назв.

Составители: Ю.В. Гуменникова, к. т. н., доцент,

Л.В. Кайдалова, к. ф.-м. н., доцент,

О.Е. Лаврусь, к. т. н., доцент

Рецензенты: к. ф.-м. н., доц. СамГУ Воскресенская Л.А.,

доцентСамГУПС Паняев В.А.

© Гуменникова Ю.В., Кайдалова Л.В., Лаврусь О.Е., 2009

© Самарский государственный университет путей сообщения, 2009

# 1. Задания для контрольной работы №1

## Задание № 1

Решить систему линейных уравнений



методом Крамера и матричным методом. Сделать проверку.

Коэффициенты системы приведены в таблице 1.

*Таблица* 1

| **№ варианта** | **Коэффициенты системы линейных уравнений** | | | | | | | | | | | |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***а*11** | ***а*12** | ***а*13** | ***а*21** | ***а*22** | ***а*23** | ***а*31** | ***а*32** | ***а*33** | ***b*1** | ***b*2** | ***b*3** |
| **1.1.** | 3 | **–**1 | 1 | 2 | **–**5 | **–**3 | 1 | 1 | **–**1 | 4 | **–**17 | 0 |
| **1.2.** | 1 | 1 | 1 | 2 | **–**1 | **–**6 | 3 | **–**2 | 0 | 2 | **–**1 | 8 |
| **1.3.** | 2 | **–**1 | **–**3 | 3 | 4 | **–**5 | 0 | 2 | 7 | 3 | **–**8 | 17 |
| **1.4.** | 1 | 1 | 1 | 2 | **–**1 | 1 | 1 | **–**1 | 2 | 6 | 3 | 5 |
| **1.5.** | 2 | 1 | **–**3 | 1 | 2 | 1 | 3 | **–**1 | 2 | 7 | 4 | **–**1 |
| **1.6.** | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | **–**4 | 3 | 2 | 2 | 2 | **–**4 | 7 |
| **1.7.** | 3 | **–**1 | 0 | **–**2 | 1 | 1 | 2 | **–**1 | 4 | 5 | 0 | 15 |
| **1.8.** | 2 | **–**1 | 1 | 1 | **–**3 | **–**5 | 3 | 1 | **–**7 | 8 | 6 | **–**4 |
| **1.9.** | 4 | 3 | **–**9 | 2 | 3 | **–**5 | 1 | 8 | **–**7 | 9 | 7 | 12 |
| **1.10.** | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 | 0 | 2 | 2 |
| **1.11.** | 1 | **–**2 | 3 | 2 | 3 | **–**4 | 3 | **–**2 | **–**5 | **–**7 | 17 | 5 |
| **1.12.** | 4 | **–**3 | 2 | 2 | 5 | **–**3 | 5 | 6 | **–**2 | **–**7 | 12 | 16 |
| **1.13.** | 1 | 1 | 2 | 2 | **–**1 | 2 | 4 | 1 | 4 | 8 | 6 | 18 |
| **1.14.** | 2 | **–**1 | **–**1 | 3 | 4 | **–**2 | 3 | **–**2 | 4 | 0 | **–**5 | **–**5 |
| **1.15.** | 3 | 4 | 2 | 2 | **–**1 | **–**3 | 1 | 5 | 1 | 24 | 2 | 26 |
| **1.16.** | 1 | 1 | **–**1 | 8 | 3 | **–**6 | **–**4 | **–**1 | 3 | **–**2 | 3 | **–**3 |
| **1.17.** | 1 | **–**4 | **–**2 | 3 | 1 | 1 | **–**3 | 5 | 6 | 1 | **–**9 | 11 |
| **1.18.** | 7 | **–**5 | 1 | 4 | 1 | **–**1 | 2 | 3 | 4 | 0 | 7 | **–**3 |
| **1.19.** | 1 | 2 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | **–**1 | 1 | 6 | 12 | 1 |
| **1.20.** | 3 | 4 | 1 | **–**1 | 1 | 0 | **–**2 | 0 | 1 | **–**1 | 3 | 5 |
| **1.21.** | **–**1 | 2 | 1 | 7 | **–**10 | **–**5 | 4 | **–**7 | **–**6 | 0 | **–**2 | **–**8 |
| **1.22.** | 1 | **–**1 | **–**3 | 2 | **–**1 | **–**2 | **–**1 | 3 | 2 | 10 | 9 | **–**5 |
| **1.23.** | **–**1 | 3 | 5 | 2 | **–**3 | **–**7 | 2 | **–**3 | **–**5 | **–**9 | 12 | 10 |
| **1.24.** | 1 | **–**1 | 3 | 2 | **–**5 | 1 | **–**1 | 4 | **–**1 | **–**2 | **–**2 | 3 |
| **1.25.** | 1 | 1 | 2 | **–**1 | 2 | 1 | 4 | **–**3 | 2 | 1 | **–**4 | 9 |
| **1.26.** | 2 | 1 | **–**2 | 1 | **–**3 | 0 | 0 | 3 | **–**1 | **–**9 | 20 | **–**22 |
| **1.27.** | 3 | 7 | 6 | 4 | 2 | 1 | 2 | 3 | 7 | 2 | **–**4 | 9 |
| **1.28.** | 4 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 | 3 | 2 | 4 | 1 | 5 | 7 |
| **1.29.** | **–**1 | 2 | 4 | **–**3 | 2 | 1 | 4 | 6 | 3 | 9 | 1 | 17 |
| **1.30.** | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 6 | 4 | 0 | 2 | 6 | 9 | 6 |

## Задание № 2

Решить систему линейных уравнений *АХ = В*, заданной расширенной матрицей, методом последовательного исключения неизвестных. В случае неопределенности системы найти ее общее, базисное и любое частное решения. Сделать проверку.

**2.1.** . **2.2.** .

**2.3.** . **2.4.** .

**2.5.** . **2.6.** .

**2.7.** . **2.8.** .

**2.9.** . **2.10.** .

**2.11.** . **2.12.** .

**2.13.** . **2.14.** .

**2.15.** . **2.16.** .

**2.17.** . **2.18.** .

**2.19.** . **2.20.** .

**2.21.** . **2.22.** .

**2.23.** . **2.24.** .

**2.25.** . **2.26.** .

**2.27.** . **2.28.** .

**2.29.** . **2.30.** .

## Задание № 3

По трем заданным точкам построить треугольник и средствами векторной алгебры найти: 1) длину стороны *ВС*; 2) уравнение линии *ВС*; 3) уравнение высоты, проведенной из точки *А*; 4) длину высоты, проведенной из точки *А*; 5) площадь треугольника *АВС*; 6) угол между сторонами *ВА* и *ВС*; 7) координаты точки *N* – середины стороны *АС*; 8) координаты точки *М*, делящей сторону *АВ* в отношении 2 : 3, считая от точки *А*.

Координаты вершин треугольника даны в таблице 2.

*Таблица* 2

| **№ варианта** | ***А*** | ***В*** | ***С*** | **№ варианта** | ***А*** | ***В*** | ***С*** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **3.1.** | (**–**2, 5) | (4, 5) | (1, 1) | **3.16.** | (6, 9) | (5, **–**4) | (4, 6) |
| **3.2.** | (**–**3, 1) | (4, **–**5) | (7, 2) | **3.17.** | (2, 3) | (4, 0) | (5, 3) |
| **3.3.** | (4, **–**1) | (4, 4) | (6, 4) | **3.18.** | (8, 7) | (3, 0) | (5, 6) |
| **3.4.** | (**–**5, 3) | (4, 6) | (8, 4) | **3.19.** | (8, 1) | (3, 0) | (3, 5) |
| **3.5.** | (0, **–**6) | (3, 5) | (**–**2, 4) | **3.20.** | (1, 3) | (7, 10) | (3, 2) |
| **3.6.** | (**–**2, **–**3) | (1, 6) | (5, 2) | **3.21.** | (4, 0) | (6, 9) | (**–**2, 1) |
| **3.7.** | (**–**6, 2) | (1, 8) | (4, 5) | **3.22.** | (**–**2, 1) | (**–**2, 5) | (4, 0) |
| **3.8.** | (1, 5) | (6, 5) | (5, 7) | **3.23.** | (**–**2, 1) | (**–**3, 1) | (4, 10) |
| **3.9.** | (5, **–**2) | (7, 2) | (5, 5) | **3.24.** | (1, **–**2) | (4, **–**1) | (6, 9) |
| **3.10.** | (5, **–**2) | (8, 4) | (6, 5) | **3.25.** | (3, 1) | (3, 2) | (1, 2) |
| **3.11.** | (9, 6) | (2, 3) | (4, 0) | **3.26.** | (**–**1, **–**1) | (0, 4) | (1, **–**1) |
| **3.12.** | (7, 5) | (4, 0) | (1, 2) | **3.27.** | (1, **–**1) | (**–**2, **–**3) | (4, 5) |
| **3.13.** | (4, 7) | (**–**3, 2) | (3, **–**2) | **3.28.** | (**–**2, 0) | (**–**1, 2) | (3, 4) |
| **3.14.** | (7, 3) | (0, 6) | (6, 8) | **3.29.** | (3, 2) | (1, 2,) | (6, 6) |
| **3.15.** | (4, 9) | (2, 4) | (5, 7) | **3.30.** | (0, 4) | (**–**2, **–**4) | (6, 6) |

## Задание № 4

По четырем заданным точкам построить пирамиду и средствами векторной алгебры найти: 1) длину ребра *А*1*А*2; 2) угол между ребрами *А*1*А*2 и *А*1*А*4; 3) площадь грани *А*1*А*2*А*3; 4) объем пирамиды *А*1*А*2*А*3*А*4; 5) составить уравнение прямой *А*1*А*2; 6) уравнение плоскости *А*1*А*2*А*3.

Координаты вершин пирамиды даны в таблице 3.

*Таблица* 3

| **№ варианта** | ***А*1** | ***А*2** | ***А*3** | ***А*4** |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **4.1.** | (1, 1, 1) | (**–**1, 2, 4) | (2, 0, 6) | (**–**2, 5, **–**1) |
| **4.2.** | (0, 5, 0) | (2, 3, **–**4) | (0, 0, **–**6) | (**–**3, 1, **–**1) |
| **4.3.** | (0, 0, 6) | (4, 0, **–**4) | (1, 3, **–**1) | (4, **–**1, **–**3) |
| **4.4.** | (2, **–**5, 3) | (3, 2, **–**5) | (5, 3, 2) | (**–**5, 3, 2) |
| **4.5.** | (6, 0, 4) | (0, 6, 4) | (4, 6, 0) | (0, **–**6, 4) |
| **4.6.** | (3, 2, 4) | (2, 4, 3) | (4, 3, **–**2) | (**–**2, **–**4,**–**3) |
| **4.7.** | (6, 3, 5) | (5, **–**4, 3) | (3, 5, 6) | (**–**6, **–**1, 2) |
| **4.8.** | (5, **–**2, **–**1) | (4, 0, 0) | (2, 5, 1) | (1, 2, 5) |
| **4.9.** | (4, 2, 5) | (3, 0, 4) | (0, 0, 3) | (5, **–**2, **–**4) |
| **4.10.** | (4, 2, **–**5) | (3, 0, 4) | (0, 2, 3) | (5, **–**2, **–**4) |
| **4.11.** | (4, 4, 10) | (7, 10, 2) | (2, 8, 4) | (9, 6, 9) |
| **4.12.** | (4, 6, 5) | (6, 9, 4) | (2, 10, 10) | (7, 5, 9) |
| **4.13.** | (3, 5, 4) | (8, 7, 4) | (5, 10, 4) | (4, 7, 8) |
| **4.14.** | (10, 6, 6) | (**–**2, 8, 4) | (6, 8, 9) | (7, 10, 3) |
| **4.15.** | (1, 8, 2) | (5, 2, 6) | (5, 7, 4) | (4, 10, 9) |
| **4.16.** | (6, 6, 5) | (4, 9, 5) | (4, 6, 11) | (6, 9, 3) |
| **4.17.** | (7, 2, 2) | (5, 7, 7) | (5, 3, 1) | (2, 3, 7) |
| **4.18.** | (8, 6, 4) | (10, 5, 5) | (5, 6, 8) | (8, 10, 7) |
| **4.19.** | (7, 7, 3) | (6, 5, 8) | (3, 5, 8) | (8, 4, 1) |
| **4.20.** | (**–**2, 1, 2) | (4, 0, 0) | (3, 2, 7) | (1, 3, 2) |
| **4.21.** | (3, 2, 7) | (1, 3, 2) | (**–**2, 1, 2) | (4, 0, 0) |
| **4.22.** | (1, 3, 2) | (3, 2, 7) | (4, 0, 0) | (**–**2, 1, 2) |
| **4.23.** | (3, 1, **–**2) | (1, **–**2, 1) | (2, 2, 5) | (**–**2, 1, 0) |
| **4.24.** | (**–**2, 1, 0) | (2, 2, 5) | (3, 1, 2) | (1, **–**2, 1) |
| **4.25.** | (2, 2, 5) | (**–**2, 1, 0) | (1, **–**2, 1) | (3, 1, 2) |
| **4.26.** | (1, **–**1, 6) | (4, 5, **–**2) | (**–**1, 3, 0) | (1, **–**1, 5) |
| **4.27.** | (6, 1, 5) | (**–**1, 3, 0) | (4, 5, **–**2) | (1, **–**1, 6) |
| **4.28.** | (1, **–**2, 1) | (3, 1, **–**2) | (2, 2, 5) | (**–**2, 1, 0) |
| **4.29.** | (4, 0, 0) | (**–**2, 1, 2) | (1, 3, 2) | (3, 2, 7) |
| **4.30.** | (**–**5, 6, **–**1) | (6, **–**5, 2) | (6, 5, 1) | (0, 0, 2) |

## Задание № 5

Даны уравнения линии *r = r* (ϕ) в полярной системе координат. Требуется: 1) построить линию по точкам на промежутке от ϕ = 0 до ϕ = 2π с шагом, равным π / 8; 2) найти уравнение линии в прямоугольной декартовой системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью; 3) назвать линию, найти координаты центра и полуоси.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **5.1.** . | **5.2.** . | **5.3.** . |
| **5.4.** . | **5.5.** . | **5.6.** . |
| **5.7.** . | **5.8.** . | **5.9.** . |
| **5.10.** . | **5.11.** . | **5.12.** . |
| **5.13.** . | **5.14.** . | **5.15.** . |
| **5.16.** . | **5.17.** . | **5.18.** . |
| **5.19.** . | **5.20.** . | **5.21.** . |
| **5.22.** . | **5.23.** . | **5.24.** . |
| **5.25.** . | **5.26.** | **5.27.** . |
| **5.28.** | **5.29.** . | **5.30.** . |

# 2. Решение типового варианта КР № 1

**Задание 1**. Решить СЛУ методом Крамера и матричным методом. Сделать проверку найденного решения.



**Решение.** *Метод Крамера*. Составим и вычислим определитель системы Δ и вспомогательные определители (полученные из Δ заменой столбца коэффициентов при соответствующей неизвестной столбцом свободных членов) разложением по элементам первой строки

Δ=

;

; ; ;

тогда

.

Сделаем проверку

 ⇒ *Х* = (4, 2, 1).

*Матричный метод*. Обозначим

, .

Найдем

1. определитель 

.

Следовательно, матрица невырожденная и существует .

2) транспонированную матрицу .

3) союзную матрицу .

4) обратную матрицу .

Находим решение системы *X = А*–1*В*:



.

*Ответ*: *Х* = (4, 2, 1).

**Задание 2.** Решить систему линейных уравнений *АХ = В*, заданной расширенной матрицей, методом последовательного исключения неизвестных. В случае неопределенности системы найти ее общее, базисное и любое частное решения. Сделать проверку.

 .

2

1

**Решение.** Возьмем переменную *х*3 в первом уравнении за базисную и исключим ее из второго и третьего уравнений системы. Для этого умножим первое уравнение на (+2) и сложим со вторым. Для исключения *х*3  из третьего уравнения умножим первое уравнения на (+1) и сложим с третьим:

 .

1

–1

Возьмем в другой строке новую базисную переменную *х*4 и исключим ее из первого и третьего уравнений. Вычеркнем строку, содержащую одни нули.

 ⇒ .

Итак, базисными переменными будут *х*3, *х*4.

Разрешим полученные уравнения относительно базисных переменных. Остальные (небазисные) переменные называются *свободными* (*х*1 и *х*2).

Выражение базисных переменных через свободные называется *общим решением* СЛУ.

В нашем случае общее решение имеет вид



Если в общем решении приравнять свободные переменные нулю, то получим *базисное решение*

.

Если в общем решении свободным переменным давать произвольные значения, то получим множество *частных* решений.

Пусть *х*1 = 1, *х*2 = –1 ⇒ ;

*х*1 = 0, *х*2 = 2 ⇒ .

Сделаем проверку, подставив, например, базисное решение в СЛУ:



*Ответ*: Общее решение  Базисное решение , частное решение .

**Задание 3.** По трем заданным точкам *А*(3, 1), *В*(–13, –11), *С*(–6, 13) построить треугольник и средствами векторной алгебры найти: 1) длину стороны *ВС*; 2) уравнение линии *ВС*; 3) уравнение высоты, проведенной из точки *А*; 4) длину высоты, проведенной из точки *А*; 5) площадь треугольника *АВС*; 6) угол между сторонами *ВА* и *ВС*; 7) координаты точки *N* – середины стороны *АС*; 8) координаты точки *М*, делящей сторону *АВ* в отношении 2 : 3, считая от точки *А*.

**Решение.** Чертеж треугольника приведен на рисунке 1.

1. Вычислим координаты вектора , где *В*(*х*1, *у*1, *z*1), *С*(*х*2, *у*2, *z*2), по формуле 

 = (–6 – (–13); 13 – (–11)) = (7, 24).

Вычислим длину вектора по формуле 

Р и с у н о к 1

*х*

*В*(–13,–11)

*D*(–8,52; 4,36)

*M*(–3,4; 3,8)

–13

1

4,36

–3,4

*N*(–1,5; 7)

*A*(3, 1)

*C*(–6, 13)

13

7

3

–10

–8,52

–6

–1,5

0

*у*

–3,8

–11

α

= .

2. Запишем уравнение прямой *ВС* в виде:

 ⇒  ⇒  ⇒ .

Уравнение прямой *ВС*: .

3. Уравнение высоты *АD* может быть получено различными способами.

**1 способ.**Заметим, что вектор  является нормальным вектором для прямой *АD* и точка *А*(3, 1) принадлежит прямой *АD*, следовательно,

 ⇒ .

Итак, *АD*: .

**2 способ.**Запишем уравнение высоты, проведенной из точки *А* в форме уравнения прямой с угловым коэффициентом *k*, при этом воспользуемся свойствами угловых коэффициентов взаимно перпендикулярных прямых.

Определим угловой коэффициент прямой *ВС*. Для этого разрешим уравнение прямой относительно *у*, имеем

 ⇒  ⇒ .

Подставим полученные данные в уравнение прямой, проходящей через точку *М*(*х*0, *у*0), перпендикулярно данной прямой *y* = *k*1*x + b*, которое имеет вид , и получим .

Запишем полученное уравнение в форме общего уравнения плоскости:

.

Заметим, что результаты в первом и втором слyчаях совпадают.

Итак, прямая *АD* задается уравнением .

4. Длину высоты *АD* также можно определить различными способами.

**1 способ.**Поскольку координаты точки *А* известны, найдем координаты точки *D*. Заметим, что точка *D* лежит на пересечении прямых *ВС* и *АD*, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнениям обеих прямых. Составляем систему из уравнений, задающих прямые *ВС* и *АD*:



Решим систему по формулам Крамера:

 ⇒ ,

, ,

;  ⇒ *D*(–8,52; 4,36).

Теперь воспользуемся формулой для вычисления длины отрезка

.

**2 способ.** Длину отрезка *АD* можно рассматривать как расстояние от точки *А*(3, 1) до прямой *ВС* (), поэтому воспользуемся формулой , где (*x*0, *y*0) – координаты точки *А*, *Ах + Ву + С* = 0 – уравнение прямой:

.

5. Найти площадь треугольника *АВС*. В предыдущих пунктах были определены величина основания  и длина высоты . Поэтому целесообразно применить формулу . Имеем  (кв. ед.).

6. Для вычисления величины угла между сторонами *ВА* и *ВС* (угол α) воспользуемся формулой :

, ,

 .

.

α= аrcсos 0,8 = 36°50′(если воспользоваться калькулятором или компьютером, то результат может быть записан в виде 36,87°).

7. Для нахождения координат середины отрезка *АС* воспользуемся формулами ; ; , где λ = 1.Имеем

 ⇒ .

8. Координаты точки *М*, найдем по формулам ; ; , где λ = 2 / 3:

; .

Окончательно .

*Ответ*: = 25; уравнение прямой *ВС*: ; уравнение прямой *АD*: ; ;  (кв. ед.); α= 36°50′;;.

**Задание 4.** По четырем заданным точкам *А*1(4, 2, 5), *А*2(0, 7, 2), *А*3(0, 2, 7), *А*4(1, 5, 0) построить пирамиду и средствами векторной алгебры найти: 1) длину ребра *А*1*А*2; 2) угол между ребрами *А*1*А*2 и *А*1*А*4; 3) площадь грани *А*1*А*2*А*3; 4) объем пирамиды *А*1*А*2*А*3*А*4; 5) уравнение прямой *А*1*А*2; 6) уравнение плоскости *А*1*А*2*А*3.

Чертеж пирамиды приведен на рисунке 2.

Р и с у н о к 2

*у*

*х*

*z*

*A*2

*A*3

*A*1

*A*4

4

1

2

5

7

0

5

2

7

1. Найдем координаты и длину вектора :

=,



.

2. Для определения угла ϕ, вычислим координаты и модули векторов, направленных по сторонам этого угла:

, ;

.

Угол определим по формуле

.

По таблицам находим .

3. Для вычисления площади грани *А*1*А*2*А*3 воспользуемся свойствами векторного произведения двух векторов, на которых построен треугольник *А*1*А*2*А*3, и формулой :

, = (–4, 5,–3), ,

=,

 ⇒  (кв. ед.).

4. Для вычисления объема воспользуемся формулой смешанного произведения:

,  (куб. ед.).

5. Для определения уравнения прямой *А*1*А*2 воспользуемся уравнением . Имеем

,

окончательно получаем уравнение прямой *А*1*А*2

.

6. Уравнение плоскости *А*1*А*2*А*3 запишем в форме уравнения плоскости, проходящей через три точки по формуле :





 .

Разделим обе части уравнения на 10, окончательно уравнение плоскости *А*1*А*2*А*3 примет вид *x* + 2*y* + 2*z –* 18 = 0.

*Ответ*: ; ;  (кв. ед.);

 (куб. ед.); уравнение прямой *А*1*А*2: ;

уравнение плоскости *А*1*А*2*А*3: *x* + 2*y* + 2*z –* 18 = 0.

Задание 5 Даны уравнения линии  в полярной системе координат. Требуется: 1) построить линию по точкам на промежутке от ϕ = 0 до ϕ = 2π с шагом, равным π / 8; 2) найти уравнение линии в прямоугольной декартовой системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью; 3) назвать линию, найти координаты центра и длины полуосей.

**Решение.** Составим таблицу 4 для вычисления значений *r*.

*Таблица* 4

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ϕ | 0 | π / 8 | π / 4 | 3π / 8 | π / 2 | 5π / 8 | 3π / 4 | 7π / 8 | π | … |
| cos ϕ | 1 | 0,92 | 0,71 | 0,38 | 0 | –0,38 | –0,71 | –0,92 | –1 | … |
| *r* | 1 | 1,04 | 1,15 | 1,38 | 1,80 | 2,59 | 4,14 | 6,90 | 9 | … |

Построим линию, учитывая, что  (рисунок 3).

*х*, *х*′

*у* ′

π / 8

*О*′(–4, 0)

*О*

9

8

7

6

5

4

3

2

1

3

–3

–9

Р и с у н о к 3

*у*

Для перехода в декартовую систему координат воспользуемся формулами

, .

Получим уравнение

,

которое после преобразований примет вид

 ⇒  ⇒

⇒  ⇒ ,

 ⇒  ⇒ .

Получили уравнение эллипса с центром в точке *О*′(–4; 0) и полуосями *а* = 5, *b* = 3 (рисунок 4).

*Ответ*: уравнение эллипса с центром в точке

*О*(–4; 0) и полуосями *а* = 5, *b* = 3.

# 3. Задания для контрольной работы № 2

## Задание № 6

Даны комплексные числа *z*1 и *z*2 (таблица 5).

*а*). Записать их в тригонометрической форме и отметить полученные числа на комплексной плоскости; *б*). Найти числа *z*1  + *z*2, *z*1  – *z*2, построить; *в*). Найти *z*1 *z*2, *z*1 / *z*2, записать в тригонометрической и алгебраической формах, сравнить результаты; *г*). Найти ; *д*). Найти , построить.

*Таблица* 5

| **№ варианта** | ***z*1** | ***z*2** | **№ варианта** | ***z*1** | ***z*2** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **6.1.** |  |  | **6.16.** |  |  |
| **6.2.** | 3 + 3*i* |  | **6.17** | – 4 + 4*i* |  |
| **6.3.** |  |  | **6.18.** |  |  |
| **6.4.** |  |  | **6.19.** |  |  |
| **6.5.** | – 2 + 2*i* |  | **6.20.** | 3 – 3*i* |  |
| **6.6.** |  |  | **6.21.** |  |  |
| **6.7** |  |  | **6.22.** |  |  |
| **6.8.** | – 4 – 4*i* |  | **6.23.** | 2 – 2*i* |  |
| **6.9.** |  |  | **6.24.** |  |  |
| **6.10.** |  |  | **6.25.** |  |  |
| **6.11.** | 1 – *i* |  | **6.26.** | 1 + *i* |  |
| **6.12.** |  |  | **6.27** |  |  |
| **6.13.** |  |  | **6.28.** |  |  |
| **6.14.** | 2 + 2*i* |  | **6.29.** | – 5 + 5*i* |  |
| **6.15.** |  |  | **6.30.** |  |  |

## Задание № 7

Найти пределы функций.

**7.1.** *а*)  при , , ;

*б*) ; *в*) ; *г*) .

**7.2.** *а*)  при , , ;

*б*) ; *в*) ; *г*) .

**7.3.** *а*)  при , , ;

*б*) ; *в*) ; *г*).

**7.4.** *а*)  при , , ;

*б*) ; *в*) ; *г*) .

**7.5.** *а*)  при , , ;

*б*) ; *в*) ; *г*) 

**7.6.** *а*)  при , , ;

*б*) ; *в*) ; *г*) .

**7.7.** *а*)  при , , ;

*б*) ; *в*) ; *г*) .

**7.8.** *а*)  при , , ;

*б*) ; *в*) ; *г*) .

**7.9.** *а*)  при , ,;

*б*) ; *в*) ; *г*) .

**7.10.** *а*)  при , , ;

*б*) ; *в*) ; *г*) .

* 1. *а*)  при ;

*б*) ; *в*) ; *г*) .

* 1. *а*)  при ;

*б*) ; *в*) ; *г*) .

* 1. *а*)  при ;

*б*); *в*) ; *г*) .

* 1. *а*)  при ;

*б*) ; *в*) ; *г*) .

* 1. *а*)  при ;

*б*) ; *в*) ; *г*) .

* 1. *а*)  при ;

*б*) ; *в*) ; *г*) .

* 1. *а*)  при ;

*б*) ; *в*) ; *г*) .

* 1. *а*)  при ;

*б*) ; *в*) ; *г*) .

* 1. *а*)  при ;

*б*) ; *в*) ; *г*) .

* 1. *а*)  при ;

*б*) ; *в*) ; *г*) .

* 1. *а*)  при 2, 3, ;

*б*)  *в*)  

* 1. *а*)  при 0, 2, ;

*б*)  *в*)  

* 1. *а*)  при 3, –3, ;

*б*)  *в*)  

* 1. *а*)  при –3, –2, ;

*б*)  *в*)  

* 1. *а*)  при 2, 4, ;

*б*)  *в*)  

* 1. *а*)  при 2, 5, ;

*б*)  *в*)  

* 1. *а*)  при 1, –4, ;

*б*)  *в*)  

* 1. *а*)  при 5, –5, ;

*б*)  *в*)  

* 1. *а*)  при –2, 1, ;

*б*)  *в*)  

* 1. *а*)  при –2, –1, ;

*б*) * в*) ** 

## Задание № 8

Задана функция *y = f* (*x*). Установить, является ли данная функция непрерывной. В случае разрыва функции в некоторой точке найти ее пределы слева и справа, классифицировать характер разрыва. Построить схематично график функции.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

## 

## Задание № 9

Дано уравнение *f* (*x*) = 0. Требуется: 1) графическим методом отделить корень этого уравнения; 2) найти этот корень с точностью до 0,1 методом деления отрезка пополам.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **9.1.** | 2*x*+ 5*x* = 0. | **9.2.** | *х*3 + 2*х* – 7 = 0 | **9.3.** | *х* – (*х* + 1)3 = 0. |
| **9.4.** | ln *x* + 5*x* = 0. | **9.5.** | *x* ln *x* – 4 = 0. | **9.6.** | *х*3 + 3*х* – 7= 0. |
| **9.7.** | ln *x* – 6 + 7*x* = 0. | **9.8.** | 3*x* + 4*x* = 0. | **9.9.** | 4*x* + 2*x* = 0. |
| **9.10.** | 5*x* + 3*x* = 0. | **9.11.** | 2*x* + 2*x* – 2 = 0. | **9.12.** | ln *x* + 3*x* – 2 = 0. |
| **9.13.** | 2*х* + 5*х* – 3 = 0. | **9.14.** | ln *x* + 3*x* – 1 = 0. | **9.15.** | *x* ln *x* – 5 = 0. |
| **9.16.** | 2*ex* – *x*2 = 0. | **9.17.** | ln *x* – 5 + 6*x* = 0. | **9.18.** | 4*x* + 5*x* = 0. |
| **9.19.** | *ex* + 3*x* = 0. | **9.20.** | 4*x* + 3*x* = 0. | **9.21.** | *ex* + 5*x* = 0. |
| **9.22.** | 3*x*2 – 7*ex* = 0. | **9.23.** | 3*x* + *x* = 0. | **9.24.** | 2 ln *x* + 5*x* = 0. |
| **9.25.** | 3*x* ln *x* – 7 = 0. | **9.26.** | *х*3 + 4*х* + 1 = 0. | **9.27.** | ln *x* – 7 + 8*x* = 0. |
| **9.28.** | 2⋅3*x* + 7*x* = 0. | **9.29.** | 3⋅4*x* + 7*x* = 0. | **9.30.** | 2⋅5*x* + 7*x* = 0. |

# 4. Решение типового варианта КР № 2

**Задание 6.** Даны комплексные числа *z*1 и *z*2. *а*). Записать их в тригонометрической форме и отметить полученные числа на комплексной плоскости; *б*). Найти числа *z*1 + *z*2, *z*1 – *z*2, построить; *в*). Найти *z*1 *z*2, *z*1 / *z*2, записать в тригонометрической и алгебраической формах, сравнить результаты; *г*). Найти ; *д*). Найти , построить.

**Решение.** *а*). Преобразуем число  к виду , для этого умножим и разделим его на число, сопряженное к знаменателю

.

Запишем числа  и  в тригонометрической форме. Воспользуемся формулами

,  

, 

Точка  попадает во вторую четверть, поэтому ϕ1 = arctg (–4 / 3) + 180° = = –53,13° + 180° = 126,87° ⇒  = 5.

, 

Точка  попадает в четвертую четверть, поэтому ϕ2 = arctg (–2 / 5) = –21,8° и

 = 5,39.

Отметим полученные числа на комплексной плоскости (рисунок 4).

*z*1

*х*

*y*

0

*z*3

*z*2

3

1

–2

–1

–1

–3

3

2

1

4

2

4

5

–2

*z*4

Р и с у н о к 4

–3

–4

–5

–6

–7

–8

5

6

*б*). Вычислим *z*3 *= z*1  + *z*2, *z*4 *= z*1  – *z*2. В алгебраической форме

*z*3 =  + ;

*z*4 =  – .

Отметим полученные числа на комплексной плоскости (рисунок 9.1).

*в*). Вычислим *z*1*z*2 и *z*1 / *z*2.

В алгебраической форме

;

;

в тригонометрической форме по формулам



имеем

= 55,39=

= 26,95,

.

Для проверки полученных результатов перейдем от тригонометрической формы записи комлексных чисел опять к алгебраической:

= 26,95 = 26,95 (–0,26 + 0,966*i*) = –7,01 + 26,02*i*,

= 0,93 (–0,854 + 0,52*i*) = –0,79 + 0,48*i*.

Таким образом, расчеты выполнены верно.

*в*) Вычислим . По формуле  имеем

 = 53

.

Для нахождения корней третьей степени воспользуемся формулой Муавра :

 ⇒



, 

;

;

.

Отметим полученные числа на комплексной плоскости (рисунок 4).

**Задание 7.** Вычислить пределы

*а*)  при *х*0 = 2; *х*0 = 1; *х*0 → ∞.

*б*) ; *в*) ; *г*) .

**Решение.** При вычислении пределов допустимы использование уже известных пределов и элементарные преобразования. В некоторых случаях бывает целесообразным использовать для приближенных вычислений при малых значениях *х* (всюду ) таблицу эквивалентных бесконечно малых:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1)  ~ *х*, | 2) tg *x* ~ *х*, | 3)  ~ *х*, |
| 4)  ~ *х*, | 5)  ~ , | 6)  ~ *х*, |
| 7)  ~ *х*, | 8)  ~ *х* ln *a*, | 9)  ~ *aх*. |

*а*) 1. 

*а*) 2. .

Неопределенности вида  раскрываются путем сокращения на множитель, дающий 0. Разложим числитель и знаменатель на множители по формуле . Для этого решим уравнения  и . Корни первого уравнения – {1, –2 / 3}, второго – {1, –3 / 2}, тогда

, .

Подставим полученные разложения под знак предела и получим

.

*а*) 3. .

Такие неопределенности раскрываются путем вынесения старшей степени неизвестной

.

*б*) .

Для того, чтобы избавиться от иррациональностей, умножим и числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю:



.

*в*) .

Для раскрытия неопределенностей такого вида воспользуемся первым замечательным пределом  и равенством .

Тогда



.

*г*) .

Для раскрытия неопределенностей вида  воспользуемся вторым замечательным пределом 

Тогда





.

Задание 8. Задана функция  Установить, является ли данная функция непрерывной. В случае разрыва функции в некоторой точке найти ее пределы слева и справа, классифицировать характер разрыва. Построить схематично график функции.

**Решение.** В интервалах (–∞; 0), (0, 2) и (2, ∞) функция непрерывна. Исследуем функцию на непрерывность в точках *х*1 = 0 и *х*2 = 2. Воспользуемся условием непрерывности функции в точке *х*0 .

1. исследуем точку*х*1 = 0:





точка *х*1 = 0 – точка разрыва функции 1 рода со cкачком *s*(0) = –1;

1. исследуем точку *х*2 = 2:



,

*х*

*у*

1

2

3

4

0

–1

–2

–3

1

2

3

4

–1

*y =* 2*x –* 1

*y =* 5 – *x*

*y = x*2

Р и с у н о к 5

следовательно, в точке *х*2 = 2 функция непрерывна. Построим график (см. рисунок 5).

**Задание 9.** Дано уравнение . Требуется: 1) Графическим методом отделить корень этого уравнения. 2) Найти этот корень методом половинного деления с точностью ε = 0,1.

**Решение.** Для нашего примера примем ; .

Графики этих функций изображены на рисунке 6.

Как видно, . Рассмотрим отрезок [0, 1]. Имеем

; ; .

Таким образом, на отрезке [0, 1] функция *f* (*x*) непрерывна, принимает значения разных знаков на концах отрезка [0, 1] и первая производная  сохраняет знак на интервале (0, 1), поэтому на этом отрезке имеется единственный корень. Рассмотрим интервалы  и :

,

т. е. на этих интервалах функция *f* (*x*) не меняет знак, следовательно, корней на них нет.

Найдем корень на отрезке [0, 1]. Итерационная процедура метода половинного деления будет иметь вид

1) ,  < 0;

2) , 0,753 + 0,75 – 1 = 0,172 > 0;

3) ,  = *f* (0,625) = 0,6253 + 0,625 – 1 = –0,131 < 0;

4) ,  =

*f* (0,688) = 0,6883 + 0,688 – 1 = 0,012 > 0;

5) ξ ∈ [0,625; 0,688].

*x*

0

*y*

*y = x*3

1

2

–1

–2

1

2

3

*y =* 1 – *х*

ξ

–1

Р и с у н о к 6

Так как длина последнего отрезка = 0,063 < ε = 0,1, то процесс закончен и приближенное значение корня . Возьмем в качестве корня середину отрезка, т. е. 0,66.

Для проверки результатов расчетов вычислим *f* (0,66): , т. е. корень найден верно.

## 📚 Рекомендуемая литература

1. **Беклемишев Д.В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 2004. 376 с.
2. **Пискунов Н.С.** Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. для втузов. В 2-х томах. Т. I. М.: Интеграл-пресс, 2007. 416 с.
3. **Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.** Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. М.: Высшая школа, 2007. 416 с.
4. **Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н.** Высшая математика для экономических специальностей: Учебник и практикум. Ч. 1. Под ред. Кремера Н.Ш. М.: Высшее образование, 2005. 486 с.
5. **Письменный Д.Т.** Конспект лекций по высшей математике (часть 1). М.: Айрис-пресс, 2004. 288 с.
6. **Высшая математика:** Методические указания, рабочая программа и контрольные задания для студентов заочной формы обучения инженерно-технических специальностей. Часть 1 / Ю.В. Гуменникова, Л.В. Кайдалова, О.Е. Лаврусь; Самара: СамГУПС, 2009. 72 с. (МУ № **2298**).
7. **Высшая математика.** Тренировочные тестыдля студентов заочной формы обучения инженерно-технических и экономических специальностей (1 семестр) / А.Д. Бочкарев, Л.В. Кайдалова; Самара: СамГУПС, 2009. 34 с. (МУ № **2253**).
8. **Климова Е.Н., Маркович О.Ф.** Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Конспект лекций для студентов первого курса всех специальностей и форм обучения. Самара: СамГАПС, 2003. 64 с.
9. **Высшая математика.** Тренировочные тестыдля студентов инженерно-технических и экономических специальностей / А.П. Зубарев, Л.В. Кайдалова; Самара: СамГАПС, 2005. 28 с. (МУ № **1579**).

**Оглавление**

1. Задания для контрольной работы №1 3

Задание № 1 3

Задание № 2 4

Задание № 3 6

Задание № 4 7

Задание № 5 8

2. Решение типового варианта КР № 1 8

3. Задания для контрольной работы № 2 18

Задание № 6 18

Задание № 7 19

Задание № 8 23

Задание № 9 25

4. Решение типового варианта КР № 2 25

Рекомендуемая литература 31

План 2009 г.

***Гуменникова Юлия Валерьевна***

***Кайдалова Людмила Витальевна***

***Лаврусь Ольга Евгеньевна***

**Высшая математика**

**Часть 1**

**Учебное издание**

Технический редактор *И.А. Шимина*

Подписано в печать 22.06.2009.

Формат 60 × 90 1/16. Усл. печ. л. 2,0.

Тираж 200 экз. Заказ № 141

Отпечатано в Самарском государственном университете путей сообщения

443022 г. Самара, Заводское шоссе, 18